

Α' ΔΥΣΚΟΛΙΑΣ

1) Ρίχνει κοίνοιοσ τάρι και αναγγέλλει ότι έφερε τυχο αριθμό ποιά η πιθανότητα να έχει φέρη 6;

ΛΥΣΗ

Έχαμε, εφ αρχής δχ $S' = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Άρα, η πιθανότητα του ενδεχομένου $A = \{\text{τυχούσ}\}$ είναι

$$P(A) = \frac{\|A\|}{\|S\|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Η πιθανότητα του ενδεχομένου να έχει φέρη 6 είναι μια δεδομένη πιθανότητα με νεο δχ τους τυχοσ αριθμοσ από τουσ 6. Άρα, τα δυνατά αποτελεσματα θα είναι πλινδα:

$$\|S\| = 3 \quad \text{και} \quad \text{παραπάνω} \quad \|B\| = 1$$

$$\text{Άρα, } P(B) = P(B|A) = \frac{\|B\|}{\|S\|} = \frac{1}{3}$$

Μ από γνωστο τύπο:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{\|A \cap B\|}{\|S\|}}{\frac{\|A\|}{\|S\|}} = \frac{\|A \cap B\|}{\|A\|} = \frac{1}{3}$$

ονου $B = \{6\}$ και $A = \{2, 4, 6\}$

2) Σε τράπουλα με 52 φύλλα γίνεται τυχαία επιλογή φύλλου και βγαίνει ότι είναι "σπαθί". Ποιά η πιθανότητα το φύλλο να είναι φιγούρα;

ΛΥΣΗ

Από τον ορισμό έχουμε για τα ενδεχόμενα

$A = \{\text{σπαθί}\}$ και $B = \{\text{φιγούρα}\}$ τη δεδομένη πιθανότητα:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\|A \cap B\|}{\|A\|} = \frac{3}{13} \leftarrow \text{φιγούρες σπαθία}$$

$\frac{1}{3} \leftarrow \text{σπαθία}$

3) Για τα ενδεχόμενα A και B του ίδιου δχ S, ζητούται:
 $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{4}$ και $P(A|B) = \frac{4}{5}$. Να υπολογιστούν
 οι πιθανότητες $P(A \cap B)$, $P(B|A)$ και $P(A^c \cup B)$.

ΛΥΣΗ

$$\bullet P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{5}$$

$$\bullet P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1/5}{1/2} = \frac{2}{5}$$

$$\begin{aligned} \bullet P(A^c \cup B) &= P(A^c) + P(B) - P(A^c \cap B) = \\ &= 1 - P(A) + P(B) - P(B - A) = \\ &= 1 - P(A) + P(B) - P(B) + P(A \cap B) = \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{7}{10} \end{aligned}$$

4) Αν $P(A \cup B) = \frac{5}{6}$, $P(B|A) = \frac{1}{4}$ και $P(A) = \frac{2}{3}$.
 Να βρείτε των πιθανότητα $P(B)$

ΛΥΣΗ

$$\bullet P(B|A) = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{2/3} = \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

$$\bullet P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow \frac{5}{6} = \frac{2}{3} + P(B) - \frac{1}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(B) = \frac{1}{3}$$

5) Για δύο ενδεχόμενα A και B του δχ S
 υδo $P(A|B) + P(A^c|B) = 1$.

ΛΥΣΗ

$$\begin{aligned} P(A|B) + P(A^c|B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} + \frac{P(A^c \cap B)}{P(B)} = \\ &= \frac{P(A \cap B) + P(A^c \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B) + P(B - A)}{P(B)} = \\ &= \frac{\cancel{P(A \cap B)} + P(B) - \cancel{P(A \cap B)}}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1 \end{aligned}$$

6) Στο πανεπιστήμιο Ιωαννίνων και συγκεκριμένα στο τμήμα μαθηματικών, στις εξετάσεις Ιανουαρίου το 25% των φοιτητών "κόπηκε" στο μάθημα των Πιθανοτήτων, ενώ το 15% των φοιτητών "κόπηκε" στο μάθημα της Αριθμητικής Ανάλυσης και το 10% των φοιτητών "κόπηκε" και στα δύο μαθήματα.

Γίνεται τυχαία επιλογή φοιτητή

i) Εάν έχει "κοπεί" στην Αριθμητική Ανάλυση, ποιά η πιθανότητα να έχει "κοπεί" στο μάθημα πιθανοτήτων

ii) Εάν έχει "κοπεί" στο μάθημα πιθανοτήτων, ποιά η πιθανότητα να έχει "κοπεί" και στην Αριθμητική Ανάλυση;

(BY D. MASTER)

ΛΥΣΗ

Έχουμε τις πιθανότητες

• $P(A) = \frac{25}{100}$, • $P(B) = \frac{15}{100}$ και • $P(A \cap B) = \frac{10}{100}$

i) $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{10}{15} \approx 67\%$

ii) $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{10}{25} \approx 40\%$